

02-03 Le plan complexe

Définitions et notation

On appelle **plan complexe** le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

À tout nombre complexe z , on associe le point $M(\operatorname{Re}(z); \operatorname{Im}(z))$ du plan complexe.

M est le **point image** du nombre z .

z est l'**affixe** du point M .

À tout nombre complexe z , on associe le vecteur $\vec{w} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(z) \\ \operatorname{Im}(z) \end{pmatrix}$ du plan complexe.

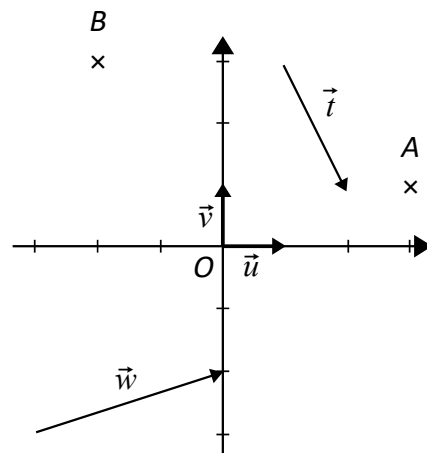
$\vec{w}$ est le **vecteur image** du nombre z .

z est l'**affixe** du vecteur $\vec{w}$.

Exemples

Dans le plan complexe ci-contre, on a :

$A(3 + i)$	$\vec{w} (3 + i)$
$B(-2 + 3i)$	$\vec{t} (1 - 2i)$



Remarques

- L'axe des abscisses du plan complexe est aussi appelé **axe des réels**.
L'axe des ordonnées du plan complexe est aussi appelé **axe des imaginaires purs**.
- À chaque point du plan complexe correspond un nombre complexe et réciproquement.
On parle de **bijection** entre le plan complexe et l'ensemble des nombres complexes.

Propriétés

Soient A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B .

- Le milieu du segment $[AB]$ a pour affixe $\frac{z_A + z_B}{2}$.
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

Soient $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ deux vecteurs d'affixes respectives z et z' .

- Le vecteur $\vec{w} + \vec{w}'$ a pour affixe $z + z'$.
- Pour tout nombre réel k , le vecteur $k \vec{w}$ a pour affixe kz .

02-03 Applications**Application 1**

Dans le plan complexe, placer les points suivants :

$A(-3 + 4i)$

$B(4 + 3i)$

$C(6 + 6i)$

$D(-1 + 7i)$

1. **a]** Que peut-on conjecturer concernant le quadrilatère $ABCD$?
b] Démontrer la conjecture.
2. **a]** Calculer l'abscisse du point F tel que $ACBF$ est un parallélogramme.
b] Quelle est l'abscisse de son centre G ?

Application 2

On pose $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Dans le plan complexe, on considère les points M_1, M_2, M_3 et M_4 d'abscisses respectives z^1 ; z^2 ; z^3 et z^4 .

1. Exprimer z^3 et z^4 sous leur forme algébrique à l'aide de **la formule du binôme** de Newton :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

2. Montrer que M_1, M_2, M_3 et M_4 appartiennent à un cercle de centre O dont on précisera le rayon.
3. S'appuyer sur la valeur de z_4 pour approfondir le raisonnement.

Application 3

Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble (E) des points M d'abscisse z tels que $A(i)$, $B(iz)$ et M sont alignés.

Application 4

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on considère les points $A(1)$; $N(z^2)$ et $P(1/z)$.

1. Dans le cas où $z = -\frac{1}{2} + i$, montrer que, les points A, N et P sont alignés.
2. **a]** Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, développer et réduire l'expression $(z^2 + z + 1) \left(1 - \frac{1}{z}\right)$.
b] Démontrer que les vecteurs $\vec{PA}$ et $\vec{PN}$ sont colinéaires si et seulement si $z^2 + z + 1$ est réel.
3. Déterminer l'ensemble (A) des nombres complexes non nuls tels que A, N et P sont alignés.